RIEPILOGO & SOMMARIO

Scalari e vettori Gli *scalari*, come per esempio la temperatura, hanno solo un'intensità. Sono specificati da un valore numerico e da un'unità di misura (ad esempio 10 °C) e seguono le regole dell'aritmetica e dell'algebra comune. I *vettori*, di cui è un esempio lo spostamento, hanno, oltre al valore assoluto, anche una direzione e un verso (5 m verso nord) e seguono le speciali regole dell'algebra vettoriale.

Somma geometrica dei vettori Due vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ si possono sommare geometricamente disegnandoli nella medesima scala e collocandoli uno di seguito all'altro, cioè ponendo la coda del secondo in corrispondenza della punta del primo. Il vettore che congiunge la coda di $\boldsymbol{a}$ alla punta di $\boldsymbol{b}$ è il vettore somma $\boldsymbol{s}$. Per sottrarre $\boldsymbol{b}$ da $\boldsymbol{a}$ si inverte la direzione di $\boldsymbol{b}$ per ottenere $-\boldsymbol{b}$; poi si somma $-\boldsymbol{b}$ ad $\boldsymbol{a}$. La somma e la sottrazione vettoriale sono commutative e rispondono alla proprietà associativa.

Componenti dei vettori Le componenti (scalari) a_x e a_y di un vettore $\boldsymbol{a}$ sono le proiezioni ortogonali di $\boldsymbol{a}$ sugli assi coordinati, che si ricavano tracciando rette perpendicolari dall'estremo di $\boldsymbol{a}$ agli assi coordinati. Le componenti sono date da

$$a_x = a\cos\theta \quad \text{e} \quad a_y = a\sin\theta\,, \tag{3.5}$$

in cui θ viene misurato rispetto all'asse x secondo le regole del cerchio trigonometrico. Il segno algebrico delle componenti indica il loro verso lungo l'asse associato. Date le componenti, possiamo ricostruire il modulo e l'orientamento del vettore mediante

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad \text{e} \quad \tan\theta = \frac{a_y}{a_x}\,. \tag{3.6}$$

Versori Risulta spesso utile introdurre i vettori unitari, o *versori*, **i**, **j** e **k** che hanno modulo 1 e le cui direzioni sono rispettivamente quelle degli assi x, y e z in un sistema di coordinate destrorso. Qualsiasi vettore $\boldsymbol{a}$ può essere espresso mediante i versori come

$$\boldsymbol{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}\,, \tag{3.7}$$

dove $a_x\mathbf{i}$, $a_y\mathbf{j}$ e $a_z\mathbf{k}$ sono le **componenti vettoriali** di $\boldsymbol{a}$ e a_x, a_y e a_z sono le **componenti scalari** di $\boldsymbol{a}$.

Somma di vettori con il metodo analitico Per sommare i vettori con il metodo analitico valgono le seguenti regole:

$$r_x = a_x + b_x;\ \ r_y = a_y + b_y;\ \ r_z = a_z + b_z. \tag{da 3.11 a 3.13}$$

Qui $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ sono i vettori da sommare ed $\boldsymbol{r}$ è il vettore somma.

I vettori e le leggi della fisica Ogni situazione fisica che implica l'uso di vettori si può descrivere usando molti possibili sistemi di coordinate. Di solito si sceglie quello che semplifica di più il nostro lavoro. Tuttavia i rapporti fra le grandezze vettoriali non dipendono dalla nostra scelta. Anche le leggi della fisica sono indipendenti dalla scelta del sistema di coordinate.

Moltiplicazione di un vettore per uno scalare Il prodotto di uno scalare s e di un vettore $\boldsymbol{v}$ è un nuovo vettore il cui modulo è sv e la cui direzione è la stessa di $\boldsymbol{v}$ con verso identico se s è positivo e verso opposto a $\boldsymbol{v}$ se s è negativo. Per dividere $\boldsymbol{v}$ per s si moltiplica $\boldsymbol{v}$ per $1/s$.

Prodotto scalare Il prodotto scalare di due vettori si scrive $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ ed è la quantità scalare data da

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = ab\cos\phi\,, \tag{3.20}$$

dove ϕ è l'angolo compreso fra la direzione di $\boldsymbol{a}$ e quella di $\boldsymbol{b}$. Il prodotto scalare può essere un numero positivo, nullo o negativo, a seconda del valore di ϕ. Il prodotto scalare è il prodotto del modulo di un vettore $\boldsymbol{a}$ per la componente del secondo vettore (b cos ϕ) nella direzione del primo vettore $\boldsymbol{a}$. Nella notazione con i versori abbiamo

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})\cdot(b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k})\,, \tag{3.22}$$

che obbedisce alla proprietà distributiva. Notiamo che $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$.

Prodotto vettoriale Il prodotto vettoriale di due vettori si scrive $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ ed è un vettore $\boldsymbol{c}$ il cui modulo c è dato da

$$c = ab\sin\phi\,, \tag{3.27}$$

in cui ϕ è il minore dei due angoli compresi fra le direzioni di $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$. La direzione di $\boldsymbol{c}$ è ortogonale al piano definito da $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$, e il suo *verso positivo* si determina applicando la regola della mano destra descritta nella figura 3.20. Notiamo che $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a})$. Nella notazione con i versori abbiamo

$$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})\times(b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k})\,, \tag{3.29}$$

in cui si applica la proprietà distributiva.

QUESITI

1. L'equazione 3.2 dimostra che l'addizione di due vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ è commutativa. Ciò significa che la sottrazione è commutativa, cioè che $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$?

2. Descrivere due vettori $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{b}$ tali che:
(a) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$ e $a + b = c$;
(b) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$;
(c) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}$ e $a^2 + b^2 = c^2$.

3. Se $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{c})$, quali delle seguenti relazioni valgono: (a) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{c}+(-\boldsymbol{b})$, (b) $\boldsymbol{a} = (-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{d}+\boldsymbol{c}$, (c) $\boldsymbol{c}+(-\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$?

4. I due vettori della figura 3.22 giacciono sul piano xy. Stabilire i segni delle componenti x e y di (a) $\boldsymbol{d}_1+\boldsymbol{d}_2$, (b) $\boldsymbol{d}_1-\boldsymbol{d}_2$ e (c) $\boldsymbol{d}_2-\boldsymbol{d}_1$.

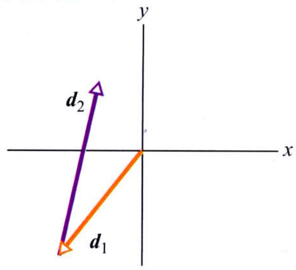

Figura 3.22 Quesito 4.

5. Quali delle combinazioni di assi della figura 3.23 può definirsi «sistema di coordinate destrorso»? Come si usa di solito, la lettera che individua l'asse è messa dalla parte positiva di quest'ultimo.